Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

Ответ: 4

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Ответ: 1

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\left(8-4\sqrt{2}\right)$.

Ответ: 8

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

Ответ: 3

Задача 2.

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

Ответ: -3

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+4x+31)$.

Ответ: -3

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-8x+20)$.

Ответ: -2

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+10x+34)$.

Ответ: -2

Задача 3.

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

Ответ: $x \in (0,1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.

Ответ: $x \in (0, \frac{4}{5}) \cup (1, +\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{4x-5} > x^{-2}$.

Ответ: $x \in (0, \frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5} < x^{-4}$.

Ответ: $x \in (0,1) \cup (\frac{9}{7}, +\infty)$

Задача 4.

Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0.$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}\,|\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0.$

Ответ: $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24}\right) + \frac{1}{4} = 0.$

Ответ: $x = \frac{13\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos^2 x + \sqrt{2}\,|\cos x| \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0.$

Ответ: $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Задача 5.

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

Ответ: 1 : 1

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

Ответ: 4

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $CD_1 : CO_1$, если известно, что $LD_2 = O_2D_2$.

Ответ: 1 : 1

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите LO_1, если известно, что $CO_2 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

Ответ: 1

Задача 6.

Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \arccos(1/2) = \pi/3 \\ y = \arcsin(1/2) = \pi/6 \end{cases}$

Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y^{3/2} = 54 \\ x^{2/3} + y = 18 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases}$

Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^3 x} + \dfrac{1}{\cos^3 y} = 54 \\ \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 16 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \arcsin(1/3) \\ y = \arccos(1/3) \end{cases}$

Задача 7.

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Ответ: $\sqrt{2}/3$

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Ответ: $\sqrt{7}/6$

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Ответ: $\sqrt{3}/2$

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Ответ: $\sqrt{3}/4$

Задача 8.

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$